1 Fonction $f(x) = x^3 - 7x^2 - 2x - 3$.

1.1 Fonction dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x)$.

$$\begin{array}{rccccccc} f'(x) = & (x^3)' & - & 7 \times (x^2)' & - & 2 \times x' & - & 3' \\ = & 3x^2 & - & 7 \times 2x & - & 2 \times 1 & - & 0 \\ = & 3x^2 & - & 14x & - & 2 & & \end{array}$$

1.2 Signe de la fonction dérivée $f'(x) = 3x^2 - 14x - 2$.

Le discriminant de $3x^2 - 14x - 2$ est $\Delta = (-14)^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 220 = 4 \times 55$.
Puisque $\Delta > 0$, l'équation $3x^2 - 14x - 2 = 0$ admet deux solutions réelles

$$\begin{array}{ccccccccc} \alpha & = & \dfrac{-(-14) - \sqrt{220}}{2 \times 3} & = & \dfrac{14 - 2\sqrt{55}}{6} & = & \dfrac{7 - \sqrt{55}}{3} & \approx & -0.14 \\ \beta & = & \dfrac{-(-14) + \sqrt{220}}{2 \times 3} & = & \dfrac{14 + 2\sqrt{55}}{6} & = & \dfrac{7 + \sqrt{55}}{3} & \approx & 4.81 \end{array}$$

d'où le tableau de signe de la fonction dérivée $f'(x) = 3x^2 - 14x - 2$

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

1.3 Sens de variation de la fonction $f(x) = x^3 - 7x^2 - 2x - 3$.

Le signe de la fonction dérivée $f'(x)$ détermine le sens de variation de la fonction $f(x)$.

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	≈ -2.86	$\searrow$	≈ -63.28	$\nearrow$	

avec $\alpha = \frac{7-\sqrt{55}}{3} \approx -0.14$ et $\beta = \frac{7+\sqrt{55}}{3} \approx 4.81$.

1.4 Equation de la tangente à la courbe de $f(x)$ au point A d'abscisse -1.

La tangente à la courbe de $f(x)$ au point A d'abscisse 1 est la droite passant par le point $A\,(-1; f(-1))$ et de coefficient directeur $f'(-1)$.

$$\begin{array}{ccccc} f(-1) & = & (-1)^3 - 7 \times (-1)^2 - 2 \times (-1) - 3 & = & -9 \\ f'(-1) & = & 3 \times (-1)^2 - 14 \times (-1) - 2 & = & 15 \end{array}$$

Par suite, la tangente à la courbe de $f(x)$ au point A d'abscisse -1 est la droite passant par le point $A(-1; -9)$ et de coefficient directeur 15.

Elle admet une équation de la forme $y = 15x + k$ avec k constante réelle, et les coordonnées du point A vérifiant cette équation, on obtient

$$\begin{aligned} y_A &= 15x_A + k \\ -9 &= 15 \times (-1) + k \\ k &= 6 \end{aligned}$$

En conclusion, une équation de la tangente à la courbe de $f(x)$ au point A d'abscisse -1 est

$$y = 15x + 6$$

1.5 vitesse moyenne (accroissement moyen) de la fonction $f(x)$ entre 1 et 1.2.

Il s'agit de proportion

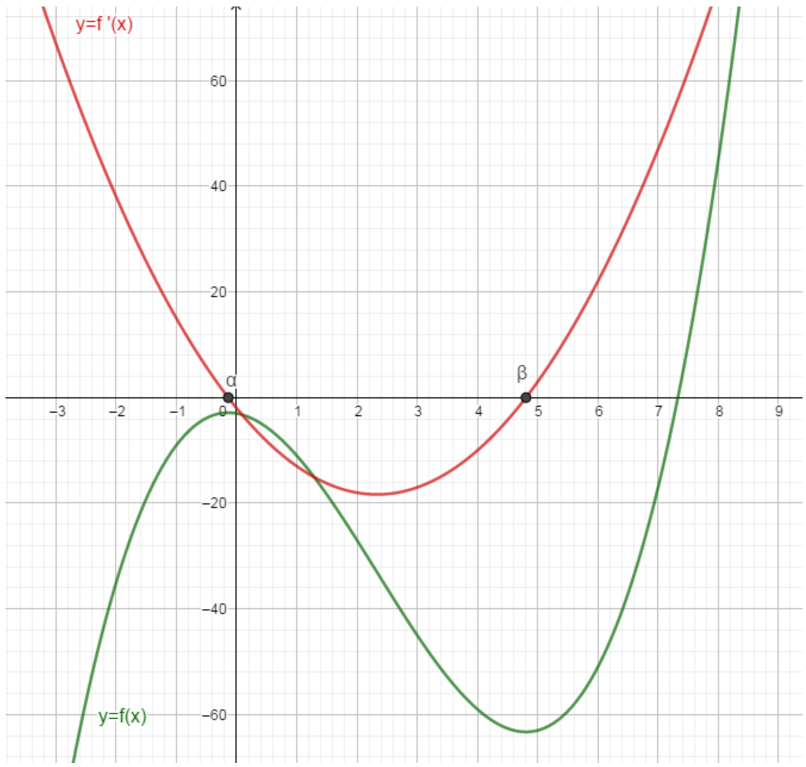
$$\frac{f(1.2) - f(1)}{1.2 - 1} = \frac{(-13.752) - (-11)}{0.2} = \frac{-2.752}{0.2} = -13.76$$

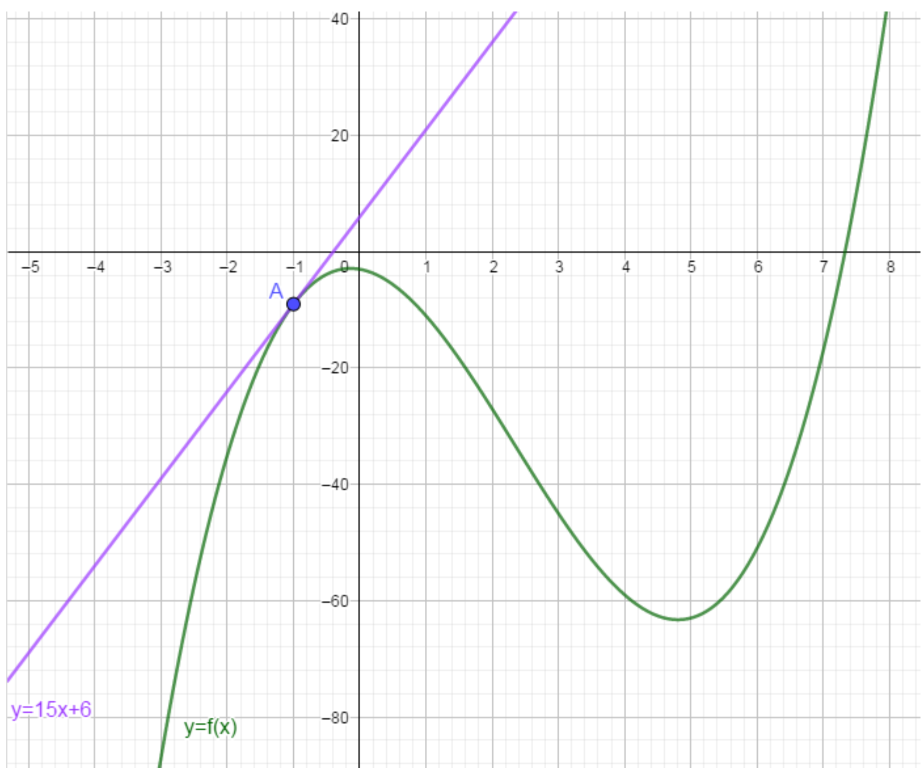
1.6 vitesse instantanée (accroissement instantané) de la fonction $f(x)$ en 1.

Il s'agit de

$$f'(1) = -13$$

Vérifications graphiques.





2 Fonction $f(x) = \frac{3x+4}{x-2}$.

2.1 Fonction dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x)$.

Pour tout réel x distinct de 2

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(3x+4)' \times (x-2) - (3x+4) \times (x-2)'}{(x-2)^2} \\
&= \frac{3 \times (x-2) - (3x+4) \times 1}{(x-2)^2} \\
&= \frac{3x-6-3x-4}{(x-2)^2} \\
&= -\frac{10}{(x-2)^2}
\end{aligned}$$

2.2 Signe de la fonction dérivée $f'(x) = -\frac{10}{(x-2)^2}$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$-$	

2.3 Sens de variation de la fonction $f(x) = \frac{3x+4}{x-2}$.

Le signe de la fonction dérivée $f'(x)$ détermine le sens de variation de la fonction $f(x)$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$\|$	$\searrow$	

2.4 Equation de la tangente à la courbe de $f(x)$ au point A d'abscisse 1.

La tangente à la courbe de $f(x)$ au point A d'abscisse -1 est la droite passant par le point $A(-1; f(-1))$ et de coefficient directeur $f'(1)$.

$$\begin{aligned}
f(-1) &= \frac{3 \times (-1) + 4}{(-1) - 2} = -\frac{1}{3} \\
f'(-1) &= -\frac{10}{((-1)-2)^2} = -\frac{10}{9}
\end{aligned}$$

Par suite, la tangente à la courbe de $f(x)$ au point A d'abscisse -1 est la droite passant par le point $A(-1; -\frac{1}{3})$ et de coefficient directeur $-\frac{10}{9}$.

Elle admet une équation de la forme $y = -\frac{10}{9}x + k$ avec k constante réelle, et les coordonnées du point A vérifiant cette équation, on obtient

$$\begin{aligned} y_A &= -\frac{10}{9}x_A + k \\ -\frac{1}{3} &= -\frac{10}{9} \times (-1) + k \\ k &= -\frac{13}{9} \end{aligned}$$

En conclusion, une équation de la tangente à la courbe de $f(x)$ au point A d'abscisse -1 est

$$y = -\frac{10}{9}x - \frac{13}{9}$$

2.5 vitesse moyenne (accroissement moyen) de la fonction $f(x)$ entre 1 et 1.2.

Il s'agit de proportion

$$\frac{f(1.2) - f(1)}{1.2 - 1} = \frac{(-9.5) - (-7)}{0.2} = \frac{-2.5}{0.2} = -12.5$$

2.6 vitesse instantanée (accroissement instantané) de la fonction $f(x)$ en 1.

Il s'agit de

$$f'(1) = -10$$

Vérifications graphiques.